Quantorenmechanik

Henning Thielemann

25. Juni 2004

Zusammenfassung

Dieser Artikel befasst sich mit der weit verbreiteten Gewohnheit, Allquantoren hinter die quantifizierten Aussagen zu schreiben. Diese Schreibweise ist allerdings inkonsistent und mitunter auch missverständlich.

1 Problem

Um zu demonstrieren, worum es geht, nehmen wir einmal die allseits bekannte Definition für die Stetigkeit einer reellen Funktion f über ihrem gesamten Definitionsbereich her und lassen diese Formel einfach auf uns wirken:

$$\begin{aligned}&\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall y \in \mathbb{R} : \\ &|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon \qquad \forall x \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

So könnte dieser Ausdruck an der Tafel in einer beliebigen Analysis I-Vorlesung gestanden haben.

Huh, da fängt aber unser hochverehrter GEORG QUANTOR im Grabe an zu rotieren. Deshalb Halt, liebe Kinder zu Hause an den Bildschirmen, macht das nicht nach! Bitte schreibt das nicht ab und behauptet, Ihr hättet es von mir! Denn was da steht, ist Murks.

Was hat er denn nur?

Überlegt genau, was da wirklich steht! Steht da

$$\begin{aligned}&\forall x \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall y \in \mathbb{R} : \\ &\qquad |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon\end{aligned}$$

was der normalen Stetigkeit entspricht, oder soll es

$$\begin{aligned}&\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R} : \\ &\qquad |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon\end{aligned}$$

bedeuten, was der gleichmäßigen Stetigkeit entspricht?

„Ja“, sagt der versierte Quantoren-Anwender, „worauf sich die Quantoren beziehen, das ersieht man doch aus dem Kontext.“ Diese gerne hervorgebrachte Widerrede haben wir mit diesem Fall so eben elegant ausgehebelt. Hm, was ist eigentlich dagegen einzuwenden, wenn man der uneindeutigen Variante die eindeutige vorzieht, ohne dabei mehr schreiben zu müssen?

Ich habe sogar schon gesehen, dass $\delta(\varepsilon, \cancel{x})$ geschrieben wird, um zu verdeutlichen, dass bei der gleichmäßigen Stetigkeit das δ nicht vom x abhängt. – Schauderhaft, nicht wahr?

Jedoch sollte man die Diskussion gar nicht anhand der Eindeutigkeit führen, denn natürlich gibt es häufig Fälle in denen auch falsch gesetzte Quantoren irgendwie „eindeutig“ interpretiert werden können.

Ein Blick auf die Ursprünge der Quantoren soll helfen, sie besser zu verstehen:

2 Woher kommen die Quantoren?

Na das ist doch ganz klar: Quantoren sind symbolische Abkürzungen für die Redewendungen „für alle“ und „es gibt mindestens ein“. Das weiß doch jeder Erstsemestler. Leider. Nur weil es hinreichend viele Professoren so sehen, ist es aber noch nicht richtig.

Wie ist es denn nun richtig?

Fangen wir ganz von vorne an. Im Folgenden soll die Zahl n immer eine ganze Zahl bezeichnen. Nehmen wir als Beispiel die Aussage

> n ist eine gerade Zahl.

oder kurz

> $2|n$

Behaupten kann man es einfach einmal. Hm, für $n = 2$ und $n = 6$ zum Beispiel stimmt die Aussage sogar.

$$n = 2 \vee 6 \implies 2|n$$

```
Type mismatch in line 1:
∨ requires boolean as
operands
```

Ich wollte Euch doch nur mal testen. Obwohl sich

Wenn n gleich 2 oder 6 ist,
dann ist n eine gerade Zahl.

ganz vernünftig anhört, ist die 1:1-Übersetzung in Symbole völlig daneben. Richtig ist selbstverständlich:

$$(n = 2 \implies 2|n) \land (n = 6 \implies 2|n)$$

Aber es gibt noch viel mehr gerade Zahlen.

$$\begin{aligned}&(n = 0 \implies 2|n) \land \\ &(n = -2 \implies 2|n) \land (n = 2 \implies 2|n) \land \\ &(n = -4 \implies 2|n) \land (n = 4 \implies 2|n) \dots\end{aligned}$$

Hm, „. . .“ ist aber nicht besonders exakt.

Ob man vielleicht das Und-Symbol wie ein Summenzeichen verwenden kann?

$$\bigwedge_{k \in \mathbb{Z}} (n = 2k \implies 2|n)$$

Aber kann man das so hinschreiben? Ja, man kann. Man trifft diese Notation zwar nur selten an, aber sie ist richtig. Diesen Ausdruck kann man jetzt auch lesen als

Für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt: $n = 2k \implies 2|n$.

Die gebündelte Schreibweise hat gegenüber „. . .“ zudem den Vorteil, dass man auch über überabzählbare Mengen etwas aussagen kann.

Nun kann man statt $\bigwedge$ auch ein $\forall$ schreiben, die Laufvariable statt darunter daneben setzen und den Implikationspfeil zum Doppelpunkt machen, und man erhält die gleiche Aussage, nur anders aufgeschrieben. Wie Ihr seht, hat die der menschlichen Sprache nähere Symbolik mit $\forall$ die Oberhand gewonnen, und diese hat dann wohl den heutigen Missverständnissen den Weg geebnet. Bei $\bigwedge$ käme vermutlich keiner auf die Idee, es hinter den quantifizierten Ausdruck zu schreiben, genauso wie es sich keiner wagt,

$$i \sum_{i=0}^{n}$$

zu schreiben, wenn er die ganzen Zahlen von 0 bis n addieren will. Wenn man schon unbedingt etwas hinter einen zu quantifizierenden Ausdruck schreiben will, dann bitte Verbales wie „für alle x“ oder „für ein x“.

Analog zu $\bigwedge$ kann man auch die Aussage

Es gibt ungerade Zahlen.

in Symbole fassen.

$$\begin{aligned}&(2 \nmid 0) \lor (2 \nmid -1) \lor (2 \nmid 1) \lor \\ &\qquad (2 \nmid -2) \lor (2 \nmid 2) \lor \dots\end{aligned}$$

kurz

$$\bigvee_{n \in \mathbb{Z}} (2 \nmid n)\,.$$

Wenn man sich als Eselsbrücke merkt, dass $\bigvee$ ein Element, für das die Aussage zutrifft, aufspießt, während $\bigwedge$ an der Unterseite viel Platz für alle Elemente bietet, auf die die Aussage zutrifft, ist die Verwendung dieser beiden Symbole mindestens genauso intuitiv wie $\forall$ und $\exists$.

3 Folgerungen

Mit diesem Hintergrundwissen ausgestattet wundert es einen nicht mehr, dass das Negieren einer quantifizierten Aussage etwas mit dem DE MORGANschen Gesetz zu tun hat. Zur Erinnerung:

Original:

$$\begin{aligned}\neg(a \lor b) &\Leftrightarrow \neg a \land \neg b \\ \neg(a \land b) &\Leftrightarrow \neg a \lor \neg b\end{aligned}$$

Verallgemeinert:

$$\begin{aligned}\neg \bigvee_x A(x) &\Leftrightarrow \bigwedge_x \neg A(x) \\ \neg \bigwedge_x A(x) &\Leftrightarrow \bigvee_x \neg A(x)\end{aligned}$$

Während man an einer korrekt aufgedröselten Negation der verbalen Formulierung der Stetigkeit (und an der Variante mit bunt durcheinander gewürfelten Quantoren erst recht) ganz schön zu knabbern hat, kann man das Gleiche bei korrekter Notation problemlos völlig mechanisch abwickeln. Danach ist eine reelle Funktion genau dann nicht überall stetig, wenn:

$$\begin{aligned}&\exists x \in \mathbb{R} : \exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 : \exists y \in \mathbb{R} : \\ &\qquad |x - y| < \delta \land |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon\end{aligned}$$

4 Zusammenfassung

Wir haben gesehen, dass Quantoren eine exakte Interpretation in der Logik haben. Sie sind Rechensymbole und unterliegen daher einer festen Syntax. Man kann nun eine Diskussion vom Zaun brechen, welche Syntax sinnvoll ist und welche nicht. Aus Konsistenzgründen (siehe Summenzeichen) ist die Schreibweise mit vorangestellten Quantoren vorzuziehen.

5 Ausblick

Gerade in einer Zeit, in der Computerprogramme zum automatischen Lösen und Beweisen mathematischer Problemstellungen den Markt erobern, ist eine korrekte Notation absolut notwendig. Macht man sich keine Gedanken über die Sachen, die man aufschreibt, oder jene, die man der Einfachheit halber weglässt, kann einem auch das beste Computeralgebra-System nicht weiterhelfen. Diese Systeme sind überhaupt erst durch eine konsequente Formalisierung der Mathematik möglich geworden und sollten Rechtfertigung genug sein für das oft misstrauisch beäugte Bemühen der Mathematiker, ihre Wissenschaft zu formalisieren.

Alle Studenten, die sich bis jetzt nicht getraut haben, Ihre Professoren darauf hinzuweisen, dürfen nun diesen Artikel schwarz auf weiß ihren Vorlesenden unter die Nasen reiben, hehe. Oder um es einmal so zu formulieren:

$$\begin{aligned} M &: \text{Menge aller Studenten} \\ A(x) &: x\text{bislang nicht mutig genug} \\ B(x) &: x\text{hat diesen Artikel gelesen} \\ C(x) &: x\text{darf Professor diesen Artikel} \\ &\ \text{unter die Nase reiben} \end{aligned}$$

$$\forall x \in M : A(x) \wedge B(x) \implies C(x)$$