Was können Computeralgebrasysteme von funktionaler Programmierung lernen?

Henning Thielemann

Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg

2006-10-06

Was Computeralgebrasysteme heute können

- Vereinfachen
- Faktorisieren
- Gleichungen lösen
- Summieren
- Grenzwerte bestimmen
- Integrieren
- Differentialgleichungen lösen

Was Computeralgebrasysteme nicht oder kaum können

- Stochastik:

```
normal v0 m0 + normal v1 m1
```

$\longrightarrow$ `normal (v0+v1) (m0+m1)`

- explizite Formeln für rekursive Folgen (außer Summenrekursionen):

`iterate` `(x*) 1` $\longrightarrow$ **`map`** `(x^) [0..]`

- Funktionalanalysis

`integrate` **`cos`** $\longrightarrow$ **`sin`**

- Nichtstandardanalysis

```
standardPart ((f(x+eps)-f(x)) / eps)
```

$\longrightarrow$ `derive f x`

- unendliche Datenstrukturen (Bedarfsauswertung)
- Typisierung

Mathematische Objekte

Mathematisches Objekt:
(bei Grundlegung der Mathematik über die Mengenlehre)
Alles was sich als Menge darstellen lässt.

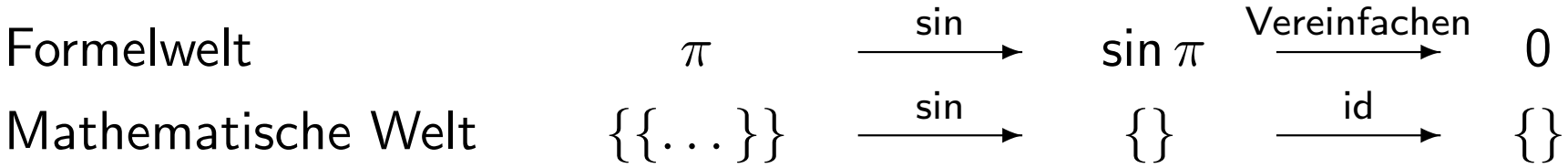
Beispiele

- natürliche Zahlen: PEANO-Zahlen
  $0 \mathrel{\widehat{=}} \{\}, 1 \mathrel{\widehat{=}} \{0\}, 2 \mathrel{\widehat{=}} \{0, 1\}$
- gebrochene Zahlen:
  Äquivalenzklassen von Paaren ganzer Zahlen
  $\frac{2}{3} \mathrel{\widehat{=}} \{(2, 3), (4, 6), (6, 9), \dots\}$
- reelle Zahlen: DEDEKINDsche Schnitte
- Funktionen: rechtseindeutige Relationen
  $\sin \mathrel{\widehat{=}} \{(0, 0), (\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}), (\frac{\pi}{2}, 1), \dots\}$

Bezeichner für mathematische Objekte

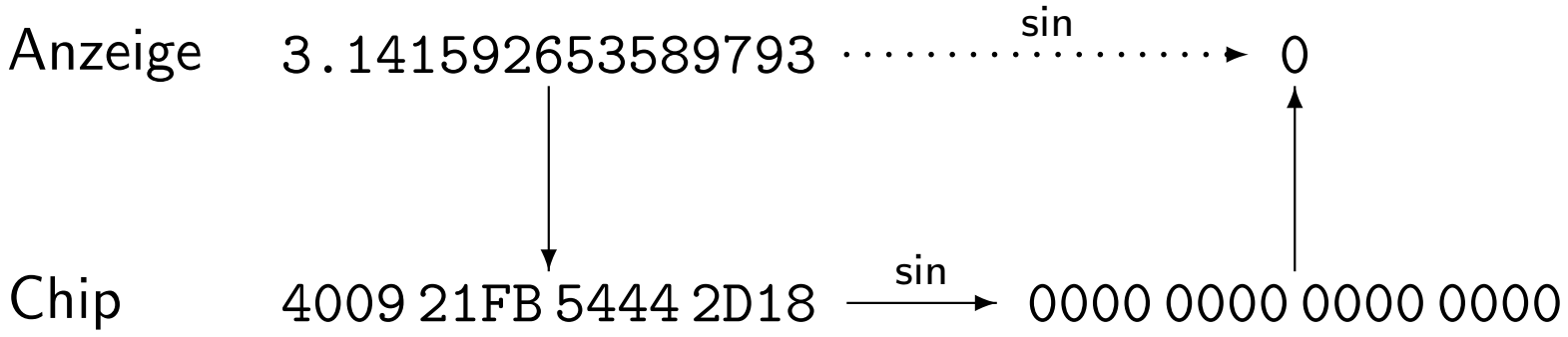
- Zahlenkonstanten: $2, 0.3, \mathrm{i}, \pi$
- Funktionskonstanten: $+, \sin$
- Variablen: n, x, f

Parallelwelten



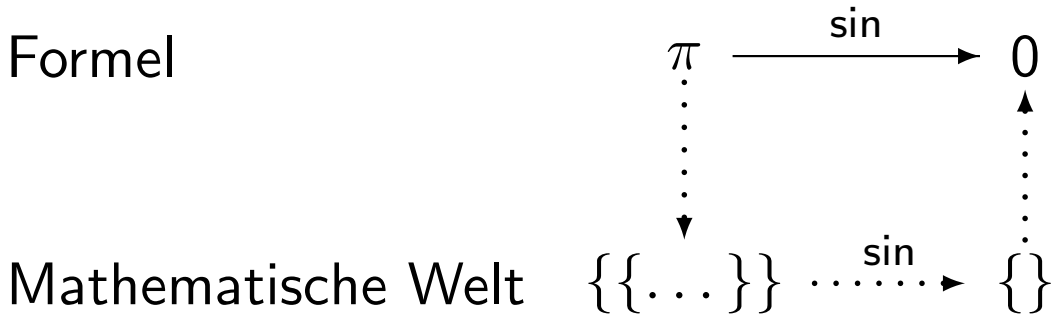
- Formeln - endliche Größe
- Mathematische Welt enthält Unendlichkeiten
- Ähnlichkeit zur Programmierung:
  Programmtext vs. ausführbares Programm
  ausführbares Programm enthält keine Variablennamen

Taschenrechner



- Taschenrechner durchläuft eigene mathematische Welt
- Nur eine Art Objekt: Gleitkommazahl
- „Taschenrechnerprinzip“ (idealisiert):
  - Eingabe Ausdruck
  - Ausgabe (einfacher) Ausdruck für gleiches Objekt

Computeralgebra



Computeralgebra

- arbeitet auf Formelebene
- kann viele Aufgaben exakt lösen
- kann noch mehr Aufgaben gar nicht lösen

Entspricht Computeralgebrafunktion
immer mathematischer Funktion?

Computeralgebrafunktion `diff`

Papier $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} \ln x$
`MuPAD` `diff(ln(x),x)`

- `diff(ln(x),2)` hat keinen Sinn.
- `diff` benötigt von zweitem Argument nicht Variablenwert, sondern Variable selbst
- `diff` ist keine mathematische Funktion!
- Es sei denn, Variablen sind selbst mathematische Objekte.
- Was bedeutet `subs(diff(ln(x),x),x=2)` ?
  $\Rightarrow$ Schachtelung von CA-Funktionen nicht assoziativ

Integrationsverweigerer

Wenn geschlossen integrierbar $\longrightarrow$ alles in Butter

```
subs(int(cos(x),x),x=2)
  →     sin(2)
```

Wenn nicht geschlossen integrierbar $\longrightarrow$ Unsinn

```
subs(int(sin(sin(x)),x),x=2)
  →     int(sin(sin(2)), 2)
```

Auswege

- `Axiom`: neue Integrationsvariable einführen
- Arbeit mit Funktionen

Prüfsteine für mathematische Funktion

- Angabe einer Wertetabelle
  (Graph der Funktion)
- Angabe eines Typen
- Implementation in (nicht-reflexiver) Programmiersprache
  (Compilersprache ohne selbstmodifizierende Programme,
  Variablenabfrage zur Laufzeit unmöglich)

Taschenrechnerprinzip bei Computeralgebra

- Wünschenswert?
- Machbar?

Operatoren und Funktionale

- Funktionen sind mathematische Objekte
- Funktionen höherer Ordnung:
  Argument oder Wert ist Funktion
- Beispiele: Operatoren, Funktionale (Funktionalanalysis)
- konkret: Integration, Ableitung, Grenzwertbildung, Norm

Viele Nichtfunktionen in CAS ...

Viele wichtige CA-Funktionen
sind nicht mathematische Funktionen.

- `simplify` (aber nahe an der Identitätsfunktion)
- `solve`
- `sum`
- `limit`
- `diff` (im Gegensatz zu `D`)
- `series`
- `O`
- `integrate`
- `pdesolve`

. . . könnten mathematische Funktionen sein

```
simplify    :: a -> a
solve       :: (a -> Bool) -> Set a
sum         :: Sequence a -> a
limit       :: Sequence a -> a
diff        :: (a -> a) -> (a -> a)
series      :: (a -> a) -> Series a
asympBound  :: (a -> a) -> Set (a -> a)
integrate   :: (a -> a) -> (a -> a)
```

Beispiele

- algebraische Gleichung: `solve (\x -> x == 1 + 1/x)`
- Differentialgleichung: `solve (\y -> y == 2*id * diff y)`

Vorteile mathematischer Funktionen

Mathematische Funktionen

- haben keine Seiteneffekte,
- können Argument oder Ergebnis anderer Funktionen sein,
- können nach Typen systematisiert werden,
- reduzieren Notwendigkeit von `hold` und `evaluate`.
- Funktionsanwendung ist assoziativ.

$$\begin{aligned} f(g(h(x))) &= (f \circ g)(h(x))) \\ &= f((g \circ h)(x)) \end{aligned}$$

Taschenrechnerprinzip bei Differentiation

Eine Funktion, drei Schreibweisen

- $x \mapsto x \cdot x$
- $x \mapsto x^2$
- $y \mapsto y^2$

Drei Wege, ein Ergebnis

$$\begin{aligned} \text{Produktregel:} \quad & D(x \mapsto x \cdot x) = x \mapsto 1 \cdot x + x \cdot 1 \\ \text{Potenzregel:} \quad & D(x \mapsto x^2) = x \mapsto 2 \cdot x \\ & D(y \mapsto y^2) = y \mapsto 2 \cdot y \end{aligned}$$

Gleiche Eingabe $\Rightarrow$ gleiches Ergebnis
Formelumformung konsistent zur mathematischen Welt!
MuPAD: `D(x->x^2)` $\longrightarrow$ `2 id`

Funktionalanalysis in Computeralgebra

```
diff :: (a -> a) -> (a -> a)
diff ln = recip
diff ln 2 = 1/2

integrate :: (a -> a) -> (a -> a)
integrate cos = sin
integrate cos pi = 0
integrate (sin . sin) 2 =
                        integrate (sin . sin) 2

cont :: (a -> a) -> (a -> a)
```

`cont f x` $\widehat{=} \lim_{y \to x} f(y)$ stetige Fortsetzung

Vereinfachung: Kürzen

$$\frac{x^2-1}{x-1} = \begin{cases} \text{undefiniert} & : x = 1 \\ x+1 & : \text{sonst} \end{cases}$$

MuPAD:

```
simplify((x^2-1)/(x-1))
```

$$x+1$$

```
limit((y^2-1)/(y-1),y=x)
```

$$\frac{x^2-1}{x-1}$$

- Beide Antworten strenggenommen falsch
- Ergebnisse müssten vertauscht werden

Kürzen: Auswege

Frage: Warum will man kürzen?
⇒ Entscheidung für

- Fallunterscheidung
  ```
  if x==1 then undefined else x+1
  ```
- Variable x irrelevant ⇒ Polynome, Polynomdivision
  ```
  poly [-1,0,1] / poly [-1,1] == poly [1,1]
  ```
- stetige Fortsetzung
  ```
  cont (\x -> (x^2-1)/(x-1)) == (\x -> x+1)
  ```

Rekursiv definierte Folgen

Rekursiv definierte Folgen ohne explizite Berechnungsvorschrift:
Kann Computeralgebrasystem Grenzwert berechnen?
Beispiel:

$$a_{n+1} = 2 \cdot a_n$$

Lösungsmöglichkeit: `solve (x=2*x, x)`
Probleme:

- Grenzwert hängt von Anfangswert ab
- `solve` kennt Anfangswert nicht
- Grenzwert eindeutig, aber `solve` liefert Lösungsmenge

Funktionale Schreibweise

```
limit :: Sequence a -> a
limit (iterate (2*) 1)
```

enthält alle Informationen.

Papagei

Einfachste Umsetzung des Taschenrechnerprinzips:
Gib Eingabe unverändert aus.

```
solve (\x -> exp x == cos x)
```

$$\{x : \exp x = \cos x\}$$

$\Rightarrow$ Einfachstes korrektes Computeralgebrasystem der Welt!

Nützlichkeit

Nützliches korrektes Computeralgebrasystem

- gibt korrekte Antwort aus,
- gibt Tipps, falls CAS Reserven sieht,
- falls gar nichts geht: Ausgabe der Eingabe ist immer richtig

Unvollständige Lösungen

```
solve (\x -> exp x == cos x)
```

$$\{x : \exp x = \cos x\} \cup \{0\}$$

Antwort brauchbar für weitere Umformungen

```
fmap exp (solve (\x -> exp x == cos x))
```

$$\{\exp x : \exp x = \cos x\} \cup \{1\}$$

Scheinlösungen

```
solve (\x -> sqrt(x+1) == x)
```

$$\{x : \sqrt{x+1} = x\} \cap \left\{ \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right\}$$

Lösungsvorschläge

eindeutiges Ergebnis, aber CAS kennt nur Lösungskandidaten

```
suggest :: a -> Set a
suggest x = solve (\y -> x==y)
```

```
let goldenRatio = limit (iterate (\x -> 1 + recip x) 1)
goldenRatio
```

goldenRatio

try `suggest goldenRatio`

`suggest goldenRatio`

$$\text{suggest}\,\text{goldenRatio} \cap \left\{ \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right\}$$

Lösungsvorschläge

Lösungsvorschlag nützlich?

```
isRational goldenRatio
```

isRational goldenRatio

```
any isRational (suggest goldenRatio)
```

false

Computeralgebra in Haskell

- Symbolische Differentiation mit Optimierer des Glasgow-Haskell-Übersetzers: SymbolicDifferentiation
- DoCon: Domain Constructor
- LambdaBot: pointless

Bedarfsauswertung

Bedarfsauswertung (Lazy evaluation):

Berechne Werte erst, wenn sie gebraucht werden.

Das erlaubt endlose Datenstrukturen.

- Folgen
- Potenzreihen
- Zeitreihen
- reelle Zahlen
- Kettenbrüche

Rechnen mit reellen Zahlen

- Darstellung reelle Zahl als Ziffernfolge
- beliebige Basis b, $b \in \mathbb{N} \wedge b \geq 2$
- Ziffern aus $[-b, b]$
- $R(b, e, (m_0, m_1, m_2, \ldots)) = \sum_{j \in \mathbb{N}_0} b^{e-j} \cdot m_j$
- Ziffernfolge entspricht Intervallschachtelung
  $R(b, e, (m_0, \ldots)) \in R(b, e, (m_0, \ldots, m_k)) + [-b^{e-k}, b^{e-k}]$
- Redundanz vermeidet Überträge

Wurzel einer Potenzreihe

Gegeben: Potenzreihe für Funktion y
Gesucht: Potenzreihe für Funktion x mit $x(t)^2 = y(t)$

Beispiele:

$$y(t) = 1 + 2 \cdot t + t^2$$
$$x(t) = 1 + t$$

$$y(t) = 1 + t$$
$$x(t) = 1 + \frac{1}{2} \cdot t - \frac{1}{8} \cdot t^2 + \frac{1}{16} \cdot t^3 - \frac{5}{128} \cdot t^4$$

Wurzelpotenzreihe: Ansätze I

- direkte Lösung

$$
\begin{aligned}
y(t) &= y_\mathrm{h} + t \cdot y_\mathrm{t}(t) \\
x(t) &= x_\mathrm{h} + t \cdot x_\mathrm{t}(t) \\
x(t)^2 &= x_\mathrm{h}^2 + 2 \cdot x_\mathrm{h} \cdot t \cdot x_\mathrm{t}(t) + t^2 \cdot x_\mathrm{t}(t)^2 \\
y_\mathrm{h} &= x_\mathrm{h}^2 \\
x_\mathrm{h} &= \sqrt{y_\mathrm{h}} \\
y_\mathrm{t}(t) &= 2 \cdot x_\mathrm{h} \cdot x_\mathrm{t}(t) + t \cdot x_\mathrm{t}(t)^2 \\
x_\mathrm{t}(t) &= \frac{y_\mathrm{t}(t) - t \cdot x_\mathrm{t}(t)^2}{2 \cdot x_\mathrm{h}}
\end{aligned}
$$

Wurzelpotenzreihe: Ansätze II

- Lösung durch Differentialgleichung

$$\begin{aligned} x(t) &= \sqrt{y(t)} \\ x'(t) &= \frac{y'(t)}{2 \cdot \sqrt{y(t)}} \\ &= \frac{y'(t)}{2 \cdot x(t)} \end{aligned}$$

- iterative Lösung mit Newton

$$x \mapsto \frac{1}{2} \cdot \left(x + \frac{y}{x} \right)$$

Quadratische Konvergenz
$\Rightarrow$ Falls erstes Glied korrekt,
Anzahl korrekte Glieder verdoppelt sich in jedem Schritt

Typen in Axiom

Keine mathematischen Typen wie

- natürliche Zahl,
- reelle Zahl,
- Wahrheitswert,
- Polynom,

sondern computeralgebrarelevante wie

- Ausdruck,
- Polynomausdruck,
- Gleichung.

Typen in Haskell

Vorteile

- statische Typzuweisung: Effizienz
- Fehler zur Übersetzungszeit aufdecken
- maschinengeprüfte Dokumentation
- Typabgleich (type inference):
  Typangabe nur wenn nötig
- Typklassen: Wiederverwendbare Programmteile

Werkzeuge

- Typbestimmung eines Ausdruckes
- Hoogle: Suche Bibliotheksfunktion passend zu Typ
- Djinn: Erzeuge Funktion passend zu Typ

Klare Ansagen

Beispiele für komplexe Typen

- Polynom über ganzen Zahlen: `Polynomial` **`Integer`**
- Polynom über Restklassenring:
  `Polynomial (ResidueClass` **`Integer`**`)`
- Restklassenring von Polynomen:
  `ResidueClass (Polynomial` **`Rational`**`)`
- Element aus Polynomkörper:
  `Ratio` `(Polynomial` **`Rational`**`)`

$\Rightarrow$ keine Missverständnisse beim Faktorisieren

Endlich isser fertig